Instituto de Matemática
Cálculo III

Prueba 3

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

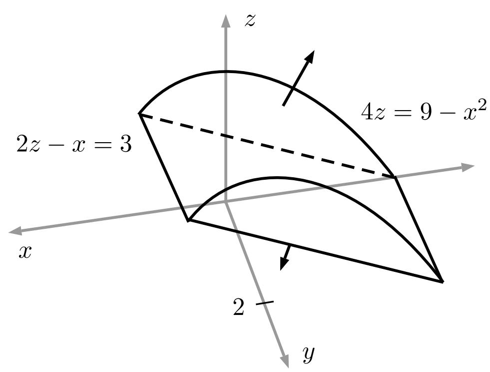
Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

---

1) [**20 ptos.**] Sea S la superficie cerrada y orientada hacia afuera, determinada por los planos $2z - x = 3$, $y = 0$ e $y = 2$ y el cilindro parabólico $4z = 9 - x^2$, como se muestra en la siguiente figura

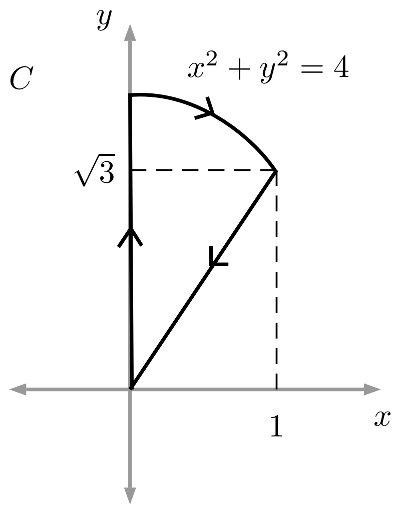


Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^y x + xy)\mathbf{i} + (x + y + z)\mathbf{j} + (zy - e^y z)\mathbf{k}$. Calcular $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\, ds$

2) [**20 ptos.**] Calcular el trabajo que ejerce el campo de fuerzas

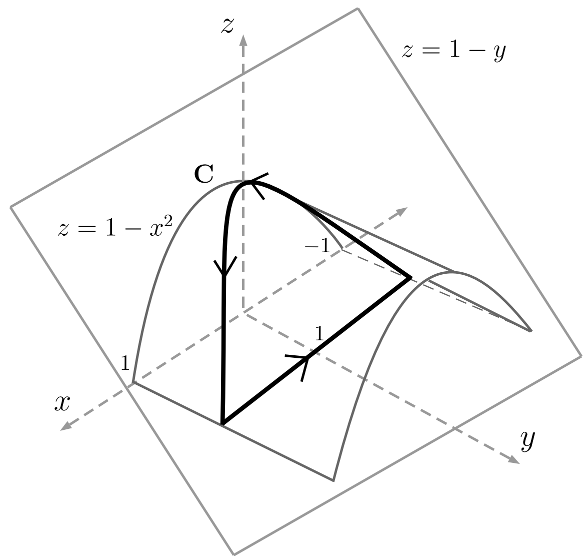
$$\mathbf{F}(x, y) = (\arctan(x^2) - xy^2)\mathbf{i} + (y^5 - 2yx^2)\mathbf{j}$$

a lo largo de la curva C dada por



Recordatorio: $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$.

3) [**20 ptos.**] Sean $\mathbf{F}(x,y,z) = (\ln(x)+y)\mathbf{i} + (7x+z^4)\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$ y C la curva suave a trozos dada por la curva intersección del cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, con $z \geq 0$, y el plano $z = 1 - y$, y el segmento de recta cuyos extremos son los puntos $(1,1,0)$ y $(-1,1,0)$, como se muestra a continuación



Use el Teorema de Stokes para calcular la integral de línea $\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$.

PAUTA

1) Podemos usar el teorema de la divergencia. Tenemos que

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 1 + 2y \qquad \text{(2 pts.)}$$

Luego

$$\iint_S \mathbf{F}\, ds = \iiint_Q (1+2y)\, dV = \int_{-3}^{1}\int_0^2\int_{\frac{x+3}{2}}^{\frac{9-x^2}{4}} (1+2y)\, dV \qquad \text{(10 pts.)}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{1}\int_0^2\int_{\frac{x+3}{2}}^{\frac{9-x^2}{4}} (1+2y)\, dV &= \int_{-3}^{1}\int_0^2 \left(\frac{9-x^2}{4} - \frac{x+3}{2}\right)(1+2y)\, dV \\
&= \frac{1}{4}\int_{-3}^{1}\int_0^2 \left(3 - x^2 - 2x\right)(1+2y)\, dV \\
&= \frac{6}{4}\int_{-3}^{1} (3 - x^2 - 2x)\, dV \\
&= \frac{6}{4}\cdot\frac{32}{3} \\
&= 16 \qquad \text{(8 pts.)}
\end{aligned}$$

2) Notemos que la curva no está orientada en sentido positivo, pero

$$\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -\int_{-C} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$$

en la cual podemos usar el teorema de Green para calcularla (2 pts.).

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
-\textstyle\int_{-C} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} &= \iint_R 2xy\, dA \qquad \text{(3 pts.)} \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^2 2\sin(\theta)\cos(\theta) r^3\, dr\, d\theta \qquad \text{(5 pts.)} \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(2\theta)\frac{r^4}{4}\bigg|_0^2 \\
&= -4\cdot\frac{\cos(2\theta)}{2}\bigg|_{\pi/3}^{\pi/2} \\
&= 1 \qquad \text{(10 pts.)}
\end{aligned}$$

3) Tenemos que

- S: $r(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (1-y)\mathbf{k}$ con $-1 \leq x \leq 1$ y $x^2 \leq y \leq 1$ (4 pts.)
- $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = (3y^2 - 4z^3)\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$ (2 pts.)
- $N = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ (2 pts.)

Luego

$$\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) N\, ds = \iint_R 6\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} 6\, dy\, dx \quad \text{(5 pts.)}$$

Ahora

$$6 \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} dy\, dx = 6 \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = 8 \quad \text{(7 pts.)}$$